TS3

DS n°5

Exercice 1:

1) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	$-\infty$			0				1		$+\infty$
$x-1$		$-$				$-$		0	$+$	
x		$-$				$+$			$+$	
f'		$+$		$\|$			$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|$	$+\infty$		$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln|x| = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \dfrac{\ln x}{x}) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln|x| = -\infty$ (pas de forme indéterminée)

$\lim\limits_{x\to 0} x - \ln|x| = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$

3)tout d'abord :$f(x) = x + m \Leftrightarrow x - \ln|x| = x + m \Leftrightarrow \ln|x| = -m$
$\Leftrightarrow |x| = e^{-m} \Leftrightarrow x = e^{-m}$ ou $x = -e^{-m}$

on en déduit : $M_1\begin{pmatrix} -e^{-m} \\ -e^{-m} + m \end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix} e^{-m} \\ e^{-m} + m \end{pmatrix}$

d'où il vient : $I\begin{pmatrix} \dfrac{-e^{-m} + e^{-m}}{2} \\ \dfrac{-e^{-m} + m + e^{-m} + m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$

lorsque m décrit $\mathbb{R}$,I décrit donc (Oy)

Exercice 2:

1) on remplace y par $ax^2 + bx + c$: $(ax^2 + bx + c)' - 2(\ ax^2 + bx + c) = x^2 \Leftrightarrow$
... $\Leftrightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = x^2$

on obtient donc en identifiant les coefficients: $\left\{\begin{array}{c} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = a = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

2)a) $y = Ce^{2x}$ (cours)

b) $v - u$ solution de (E')$\Leftrightarrow$ $(v-u)' - 2(v-u) = 0 \Leftrightarrow v' - u' - 2v + 2u = 0$
$\Leftrightarrow v' - 2v = u' - 2u \Leftrightarrow v' - 2v = x^2 \Leftrightarrow v$ solution de (E)

c) on en déduit que $v - u = Ce^{2x}$ soit $\boxed{v(x) = Ce^{2x} - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}}$

Exercice 3:

1) voir cours

2) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n}b^n$

si on prend $a = 1$ et $b = 1$ alors $a + b = 2$. D'autre part les termes $a^{n-k}b^k$ sont tous égaux à 1
La somme des termes d'une ligne du triangle de Pascal est donc égale à 2^n
3) si on prend $a = 1$ et $b = -1$ alors $a + b = 0$. D'autre part les termes $a^{n-k}b^k$ sont tous égaux à 1 si k est pair et à -1 si k est impair
on obtient donc: $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} .... + \binom{n}{k}(-1)^k + ... + \binom{n}{n}(-1)^n = 0$
(on pouvait vérifier ces résultats sur le triangle établi au 1))

<u>Exercice 4:</u>
1) $\ln(x + 1) + \ln x = 0$
domaine: il faut que : $x > 0$ et $x + 1 > 0$ donc au final: $x > 0$
résolution: $\ln(x+1)+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln(x(x+1)) = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 1 \Leftrightarrow x^2+x-1 = 0$
on trouve deux solutions: $\boxed{x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
D'après le domaine, seul $x1$ est solution
2) $\ln(x + 1) - 2\ln x > 1$
domaine: on a également: $x > 0$
résolution: $\ln(x + 1) - 2\ln x > 1 \Leftrightarrow \ln(x + 1) - \ln(x^2) > 1 \Leftrightarrow \ln(\frac{x + 1}{x^2}) > 1$
$\Leftrightarrow \frac{x + 1}{x^2} > e \Leftrightarrow x + 1 > ex^2 \Leftrightarrow ex^2 - x - 1 < 0$
$\Delta = 1 + 4e$
les racines sont $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2e}$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2}$
le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines, donc négatif sur $]\frac{-1 - \sqrt{1 + 4e}}{2e}; \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2e}[$
avec la condition du domaine on a donc comme solution: $\boxed{]0; \frac{-1 + \sqrt{1 + 4e}}{2e}[}$
<u>Exercice 4:</u>(spé)

1) il faut traiter tous les cas. x peut être congru à 0,1,2,3,4,5,6 ou 7 modulo 8
si $n \equiv 0[8]$ alors $n^2 \equiv 0[8]$
si $n \equiv 1[8]$ alors $n^2 \equiv 1[8]$
si $n \equiv 2[8]$ alors $n^2 \equiv 4[8]$
si $n \equiv 3[8]$ alors $n^2 \equiv 9[8] \equiv 1[8]$
si $n \equiv 4[8]$ alors $n^2 \equiv 16[8] \equiv 0[8]$
si $n \equiv 5[8]$ alors $n^2 \equiv 25[8] \equiv 1[8]$
si $n \equiv 6[8]$ alors $n^2 \equiv 36[8] \equiv 4[8]$
si $n \equiv 7[8]$ alors $n^2 \equiv 49[8] \equiv 1[8]$

2) $(n + 3)^2 - 1$ est divisible par 8$\Leftrightarrow (n + 3)^2 \equiv 1[8]$
$\Leftrightarrow n + 3$ est impair (voir 1) $\Leftrightarrow n$ est pair.