

exercice 1:

A)  $g(x) = (x - 1)e^x - 1$

1)  $g'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$  est du signe de  $x$  car  $e^x$  est positif

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x - 1 = -1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'$		$-$	$+$
$g$	$-1$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-2$	$+\infty$

2) d'après le tableau de variations, on voit que  $g$  ne s'annule pas sur  $] -\infty; 0]$  sur  $[0; +\infty[$ : $g$  est continue $g$  est strictement croissante

$g(0) = -2 < 0$

$g(2) \simeq 6,4 > 0$

donc  $g$  s'annule bien une seule fois sur  $\mathbb{R}$ on trouve:  $g(1,27) \simeq -0,04$  et  $g(1,28) \simeq 0,007$ . Donc:  $\alpha \simeq 1,27$  à  $10^{-2}$  près3)  $g$  est donc négative sur  $] -\infty; \alpha]$  et positive sur  $[\alpha; +\infty[$  (voir tableau de variations...)

B)  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$

1)  $f'(x) = \frac{(e^x + 1) - xe^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ . du signe de  $-g(x)$  (voir A))

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (} e^x$$

l'emporte sur  $x$ )

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe^x}{e^x + 1} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

donc la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .exercice2:le but de l'exercice est de trouver (dans le plan muni d'un repère orthonormal) l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z = \frac{i + iz}{1 - z}$  soit réel

1)  $Z = \frac{i + iz}{1 - z} = \frac{i + i(x + iy)}{1 - x - iy} * \frac{1 - x + iy}{1 - x + iy} = \dots = -\frac{2y + i(-1 + x^2 + y^2)}{(1 - x)^2 + y^2}$

$Z$  est réel  $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow -1 + x^2 + y^2 = 0$  (une fraction est nulle si le numérateur est nul)  $\Leftrightarrow M \in C(O; 1) \setminus A(1)$   
 ( si l'on veut être rigoureux, il ne faut pas oublier d'exclure la valeur 1 à cause du dénominateur...)

2) a)  $\bar{Z} = \overline{\left(\frac{i+iz}{1-z}\right)} = \frac{\overline{i+iz}}{\overline{1-z}} = \frac{-i-i\bar{z}}{1-\bar{z}}$

b)  $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{i+iz}{1-z} = \frac{-i-i\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (i+iz)(1-\bar{z}) = (-i-i\bar{z})(1-z) \Leftrightarrow \dots$  (on développe et on simplifie)  $2i(1-z\bar{z}) = 0$

on obtient donc:  $z\bar{z} = 1$  soit:  $(x+iy)(x-iy) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

exercice 3: uniquement tronc commun

$f(x) = e^{2x} - 2e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

1)  $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$

$e^x > 0$  donc:  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  donc:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^x - 2) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''$		$-$	$+$
$f$	$0$	$\searrow$	$\nearrow$
		$-1$	

3) on voit d'après ce tableau de variations ( ou en regardant sur la courbe) que l'équation  $f(x) = m$  a:

- aucune solution si  $m < -1$
- une solution si  $m = -1$  (cette solution est 0)
- deux solutions si  $-1 < m \leq 0$
- une solution si  $m > 0$

4)  $f(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$  avec  $X = e^x$

c'est une équation de degré 2 qui se résout facilement. On trouve:  $X = -1$  ou  $X = 3$

$-1$  est impossible car  $e^x > 0$

la seule possibilité est donc:  $e^x = 3$

exercice 3: uniquement spécialité

$$1) 37 = 27 + 10$$

$$27 = 2 * 10 + 7$$

$$10 = 7 + 3$$

$$7 = 2 * 3 + 1$$

$$\text{donc: } 1 = 7 - 2 * 3 = 7 - 2 * (10 - 7) = 3 * 7 - 2 * 10 = 3 * (27 - 2 * 10) - 2 * 10 \\ = 3 * 27 - 8 * 10 = 3 * 27 - 8 * (37 - 27) = 11 * 27 - 8 * 37$$

$$2) \text{ on multiplie par } 1000: \boxed{27 * 11000 - 37 * 8000 = 1000}$$

$$3) 27x + 37y = 1000 \Leftrightarrow 27x + 37y = 27 * 11000 - 37 * 8000$$

$$\Leftrightarrow 27(x - 1100) = 37 * (-y - 8000)$$

donc: 27 divise  $(37(-y - 8000))$  or 27 et 37 sont premiers entre eux

on en déduit (Gauss) que 27 divise  $-y - 8000$

$$-y - 8000 = 27k \text{ (} k \text{ entier) donc : } \boxed{y = -8000 - 27k}$$

$$\text{et } 27(x - 1100) = 37 * (-y - 8000) = 37 * 27k \text{ donc } \boxed{x = 11000 + 37k}$$

4) Un collectionneur de pièces décide de juxtaposer des pièces de cette sorte, les centres étant tous alignés, pour obtenir une longueur totale de 1 mètre si on note  $x$  le nombre de pièces de 2 francs et  $y$  le nombre de pièces de 5 francs, cela revient à résoudre:  $27x + 37y = 1000$

on a donc les solutions au 3). Mais  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels. Il faut donc que:

$$\begin{cases} 11000 + 37k > 0 \\ -8000 - 27k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{-11000}{37} \\ \frac{-8000}{27} > k \end{cases}$$

$$\frac{-11000}{37} \simeq -297,3 \text{ et } \frac{-8000}{27} \simeq -296,3$$

on a donc une seule solution pour  $k = -297$ . on a alors:  $\boxed{x = 11 \text{ et } y = 19}$

Aurait il pu y parvenir si la pièce de 5 francs avait eu un diamètre de 36mm?

on aurait du alors résoudre:  $27x - 36y = 1000$

or  $27x - 36y$  est divisible par 3 alors que 1000 ne l'est pas. Il est donc impossible de trouver des solutions