Résoudre les équations et inéquations :

- $\ln(3-5x)=0 \Leftrightarrow 3-5x=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{2}{5}}$

- $2\ln(x-4)=\ln x-2\ln 2$
  domaine :il faut que $\left\{\begin{array}{c} x-4>0 \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>4$
  résolution : $\ln(x-4)^2=\ln\frac{x}{2^2} \Leftrightarrow (x-4)^2=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x^2-\frac{33}{4}x+16=0$
  $\Delta=(\frac{33}{4})^2-4*16=\frac{65}{16}$ les solutions de cette équation sont :
  $x_1=\dfrac{\frac{33}{4}+\sqrt{\frac{65}{16}}}{2}=\frac{33}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{65}$ et $x_2=\dfrac{\frac{33}{4}-\sqrt{\frac{65}{16}}}{2}$
  finalement seul x_1 est solution de l'équation initiale car $x_2<4$

- $\ln(x+4)+\ln(x-1)=\ln 6$
  domaine :il faut que $\left\{\begin{array}{c} x+4>0 \\ x-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x>1$
  résolution : $\ln((x+4)(x-1))=\ln 6 \Leftrightarrow (x+4)(x-1)=6$
  $\Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-5$
  Finalement $\boxed{S=\{2\}}$ (cf domaine)

- $\ln|x+4|+\ln|x-1|=\ln 6$
  domaine: il faut que : $x\neq 1$ et $x\neq -4$

  on obtient ensuite :$|x+4|*|x-1|=6$
  ce qui donne :$(x+4)(x-1)=6$ ou $(x+4)(x-1)=-6$

  $\Leftrightarrow x^2+3x-10=0$ ou $x^2+3x+2=0$

  $\Leftrightarrow \boxed{x=2 \text{ ou } -5 \text{ ou } -1 \text{ ou } -2}$.

  Toutes ces solutions conviennent

- $\ln^3 x+2\ln^2 x-\ln x-2=0$posons $X=\ln x$
  on obtient alors : $X^3+2X^2-X-2=0$
  on peut remarquer que 1 est racine évidente et factoriser par $X-1$
  cela donne : $(X-1)(X^2+3X+2)=0$
  les racines de X^2+3X+2 étant -2 et -1 on obtient:
  $\ln X=1$ ou $\ln X=-2 \Leftrightarrow \boxed{X=e \text{ ou } X=e^{-2}\text{ou } e^{-1}}$

- $\ln(\frac{2x-3}{5x+1})<0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{-3x-4}{5x+1}<0$
  $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow \boxed{x<-\frac{4}{3}\text{ou } -\frac{1}{5}<x}$

- $\ln x - \dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{3}{2}$posons $X = \ln x$.on obtient : $X - \dfrac{1}{X} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{X^2-1}{X} - \dfrac{3}{2} < 0$
  $\Leftrightarrow \dfrac{2X^2-3X-2}{2X} < 0$
  il ne reste plus qu'à remplir un tableau de signes .pour le signe de $2X^2 - 3X - 2$,on utilise la règle :'signe de a à l'extérieur des racines (qui sont 2 et $-\dfrac{1}{2}$).on obtient alors :

  $X < -\dfrac{1}{2}$ ou $0 < X < 2 \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{1}{2}$ ou $0 < \ln x < 2 \Leftrightarrow \boxed{x < e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } 1 < x < e^2}$

<u>Etudier les fonctions :</u>(domaine,dérivée,limites,tableau de variations,courbe)

- $f(x) = \ln|2-5x|$
  domaine :il faut que :$2 - 5x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{2}{5}$
  $f'(x) = \dfrac{-5}{2-5x}$ du signe de $-2+5x$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln|2-5x| = \lim\limits_{X\to-\infty} \ln X = +\infty$ (idem en $-\infty$)
  $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}} \ln|2-5x| = \lim\limits_{X\to 0} \ln X = -\infty$

  d'où le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
f'		$-$	$\|$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 3)$
  domaine :il faut que :$e^{2x} - e^x + 3 > 0 \Leftrightarrow X^2 - X + 3 > 0$ toujours vrai ($\Delta < 0$)
  dérivée :$f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 3}$ du signe de $2e^{2x} - e^x$ (car le dénominateur est nécessairement positif étant donné le domaine de définition.......sympathique)
  de plus :$2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$ est du signe de $2e^x - 1$ car $e^x > 0$
  donc $f'x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\dfrac{1}{2}$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{3}{e^{2x}})) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x + \ln(1 - \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{3}{e^{2x}}) = +\infty$
  (rq:car $\ln e^{2x} = 2x$,on utilise la même technique pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$)
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 3$ (car $\lim\limits_{x\to\infty} e^X = 0$)

  finalement :

x	$-\infty$		$\ln\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\ln 3$	$\searrow$	$\ln 2,5$	$\nearrow$	$+\infty$

$(f(\ln\frac{1}{2}) = \ln(e^{\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{2}} + 3) = \ln 2,5$

- $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{(\ln x)^2}$
domaine :il faut que :$x > 0$ et $x \neq 1$ (attention au dénominateur)
$f'x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 2)2\frac{1}{x}\ln x}{\ln^4 x} = \dfrac{\frac{1}{x}\ln x(-\ln x + 4)}{\ln^4 x}$ du signe de $\ln x(-\ln x + 4)$
$-\ln x + 4 > 0 \Leftrightarrow 4 > \ln x \Leftrightarrow x < e^4$
le signe de $\ln x$ est connu......
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x(1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln^2 x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln x} = 0.....$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x(1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \frac{2}{\ln x})}{\ln x} = 0.....$
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 1} \ln^2 x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln x - 2 = -2$

x	0			1			e^4		$+\infty$
lnx	$\|\|$	$-$		0		$+$		$+$	
$-\ln x + 4$	$\|\|$	$+$				$+$	0	$-$	
f'	$\|\|$	$-$		$\|\|$		$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

- $f(x) = x\ln x - x$
domaine :il faut que $x > 0$
dérivée :on trouve facilement :$f'(x) = \ln x$ (retenir cette fonction à la dérivée remarquable)
le signe de f' s'en déduit facilement .
pour les limites ,on applique en 0 la limite du cours et en $+\infty$ on met x en facteur ....

- $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}$ du signe de $2 - \ln x$
$2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 2 > \ln x \Leftrightarrow e^2 > x$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ (pas de forme indéterminée)
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X^2)}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2\dfrac{\ln(X)}{X} = 0$
$f(e^2) = \dfrac{2}{e}$